



G CONSELLERIA
O EDUCACIÓ
I UNIVERSITATS
B DIRECCIÓ GENERAL
PERSONAL DOCENT
I CENTRES CONCERTATS

OPOSICIONS 2024

Cos: Professors de secundària

Especialitat: Matemàtiques

PART B2 DE LA PROVA: EXERCICI DE CARÀCTER PRÀCTIC

TEMPS DISPONIBLE. 4 hores

Aquesta prova pràctica consta de dues opcions (A i B), cadascuna formada per 5 problemes. L'aspirant escollirà una de les dues opcions. Cada problema serà valorat amb un màxim de 2 punts.

MODEL A

1. Sigui f una funció real, contínua en tota la recta real, tal que $\forall x \in \mathbb{R}$ verifica:

$$\begin{aligned}f(x) &\neq 0 \\f(x+y) &= f(x) \cdot f(y)\end{aligned}$$

- (a) [0,5 punts] Calcula $f(0)$.
- (b) [0,75 punts] Demuestra que $f(1) > 0$, i calcula $f(n)$ amb $n \in \mathbb{Z}$, en funció de $f(1)$.
- (c) [0,75 punts] Calcula $f(\alpha)$, essent α un nombre racional, en funció de $f(1)$.

2. Contesta:

- (a) [0,5 punts] Demuestra $(1+a)^n \geq 1+na$, $\forall a, n \in \mathbb{N}$.
- (b) [0,75 punts] Considera la igualtat $n^{p-1} = p$, essent $n, p \in \mathbb{N}$. Demuestra que quan $n = 2$ la igualtat només es verifica per a $p = 1$ o $p = 2$.
- (c) [0,75 punts] Demuestra que la igualtat $n^{p-1} = p$ és impossible si $n > 2$ i $p > 1$.

Suggeriment: L'apartat (a) es pot utilitzar per resoldre els apartats (b) i (c)

3. Es considera la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{6} & , \text{ si } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & , \text{ altrament} \end{cases}$

- (a) [0,4 punts] Comprova que es tracta d'una funció de densitat de probabilitat.
- (b) [0,4 punts] Anomenam X a la variable aleatòria que té l'anterior funció com a densitat de probabilitat. Calcula l'expressió de la funció de distribució de X .
- (c) [0,4 punts] Calcula $p(|X-3| < 0,5)$
- (d) [0,4 punts] Calcula $E(X)$ i $\text{Var}(X)$
- (e) [0,4 punts] Si tenim un triangle rectangle amb hipotenusa igual a 9 cm i un dels catets té una longitud que correspon a la variable aleatòria X , quin serà el valor esperat per a l'àrea del triangle?

4. [2 punts] Sigui $ABCD$ un quadrat de costat 1. Sigui O un cercle que té per diàmetre el costat AD , i consideram un punt E del costat AB del quadrat de tal manera que la línia CE sigui tangent al cercle O . Determina l'àrea del triangle CBE .

5. (a) [0,25 punts] Escribe tots els divisors del nombre 63. Quants en té?
- (b) [0,25 punts] Com hauria de ser la descomposició factorial d'un nombre amb exactament 7 divisors naturals? Posa'n un exemple.
- (c) [0,75 punts] Determina, de manera raonada, tots els nombres naturals, compresos entre 50 i 80, que tinguin exactament 4 divisors naturals.
- (d) [0,75 punts] Un nombre natural té exactament dos factors primers i té vuit divisors naturals, la suma dels quals val 320. Determina de manera raonada aquest nombre.

MODEL B

1. Considera la funció següent: $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.
 - (a) [0,5 punts] Representa la funció gràficament.
 - (b) [0,75 punts] Determina en funció de k el nombre de solucions de l'equació $x - k \ln x = 0$.
 - (c) [0,75 punts] Definim la successió $\{a_n\}$ on $a_{n+1} = f(a_n)$ essent $a_0 = e^{3/2}$. Prova que és convergent i calcula el seu límit.
2. Considerem a $\mathbb{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ la relació següent: $(x, y) \sim (x', y')$ si i només si $xy = x'y'$.
 - (a) [0,5 punts] Demostreu que $\sim$ és una relació d'equivalència.
 - (b) [1 punt] Denotem per $[(a, b)]$ la classe d'equivalència de l'element $(a, b) \in \mathbb{X} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Proveu que l'aplicació

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{X} / \sim \\ a &\longrightarrow [(a, 1)] \end{aligned}$$

és bijectiva.

- (c) [0,5 punts] Descriviu geomètricament la classe d'equivalència $[(0, 0)]$ com a subconjunt del pla $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
3. Una companyia produeix xips per a la fabricació de circuits integrats. El 5% dels xips produïts són defectuosos. Hi ha un test per tal de comprovar si els xips són defectuosos o aptes per a la venda, tot i que el test no és del tot fiable.
La probabilitat que un xip defectuós sigui detectat com defectuós és del 95%, en tant que la probabilitat que un xip apte sigui validat pel test com adequat per a la venda és del 97%.
 - (a) [0,25 punts] Un xip és testat i és declarat defectuós. Quina és la probabilitat que el xip testat sigui realment apte per a la venda?
 - (b) [0,25 punts] Quina és la fiabilitat del test? És a dir, quina és la probabilitat que el test qualifiqui un xip de manera correcta?
 - (c) [0,75 punts] Prenem un conjunt de 10 xips, als quals se'ls aplica el test. Es considera el nombre de xips qualificats aptes per a la venda que s'obtenen. Quina és la probabilitat que el nombre de xips qualificats com aptes per a la venda sigui major que 7?
 - (d) [0,75 punts] S'agafen un a un diferents xips i se'ls aplica el test fins que se n'obté un xip qualificat de defectuós. Sigui Y la variable aleatòria que expressa el nombre de xips provats.
Calcula $p(Y > 3)$. Quina és l'esperança de la variable Y ?

4. Siguin r i s dos raigs formant un angle de 60° . Considerem un cercle C_0 de radi r_0 tangent a ambdós raigs. Tot seguit considerem la successió de cercles formada de la següent forma: C_{n+1} és el cercle tangent a C_n i als dos raigs, amb radi estrictament menor que el radi de C_n . Es demana:
 - (a) [0,5 punts] Calcular el radi del cercle C_n en funció de r_0 .
 - (b) [0,75 punts] Demostrar que la suma total dels perímetres dels cercles és $S = 3\pi r_0$.
 - (c) [0,75 punts] Calcular la suma total de les àrees en funció de r_0 .

5. Es considera la successió recurrent en E_2

$$\overrightarrow{x_{k+1}} = A \cdot \overrightarrow{x_k} \quad \text{on} \quad A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.3 \\ 0.4 & 0.7 \end{pmatrix}$$

- (a) [0,25 punts] Provau que $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ és un vector propi de A .
- (b) [0,25 punts] Calculau els valors propis de la matriu.
- (c) [0,75 punts] Es considera el vector inicial $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$. Determina l'expressió del vector $\vec{x}_k$ en funció de k .
Quin és el comportament del vector $\vec{x}_k$ quan k tendeix a infinit?
- (d) [0,75 punts] Caracteritza el conjunt de vectors

$$A = \left\{ \vec{x}_k \in E_2 / \lim_{k \rightarrow \infty} \vec{x}_k = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$