



G CONSELLERIA
O EDUCACIÓ
I FORMACIÓ
B PROFESSIONAL
/ DIRECCIÓ GENERAL
PERSONAL DOCENT

Oposicions 2023

Cos: 0590_ Prof. Ensenyament Secundari

Especialitat: 006_ Matemàtiques

Tribunal núm.: 1

PART B DE LA PRIMERA PROVA: EXERCICI DE CARÀCTER PRÀCTIC

- Heu d'escollir una de les dues opcions
- Heu de fer cada problema en fulls separats
- Cada problema val 2 punts
- Disposeu de 4 hores

Palma , 25 de juny de 2023

OPCIÓ A

Exercici 1.- Sigui n un nombre enter positiu. Provar que $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ és divisible per 5 si i sol si, n no és divisible per 4.

Exercici 2.- Sigui f l'endomorfisme d'un $\mathbb{R}$ -espai vectorial E de dimensió 3 que en la base $B_E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ té per matriu

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) Calculeu el polinomi característic, els valors propis i els vectors propis de f .
- b) És A diagonalitzable? En cas afirmatiu, trobeu una matriu invertible S tal que $S^{-1} \cdot A \cdot S$ sigui diagonal. Calculeu la matriu S^{-1} .
- c) Trobeu una matriu B , amb coeficients reals tal que $B^2 = A$.

Exercici 3.- Un punt X , pres en la hipotenusa d'un triangle rectangle, es projecta ortogonalment sobre els catets en els punts que denominarem M i N . Determinar la posició del punt X i la longitud del segment $\overline{MN}$ quan aquesta sigui mínima.

Exercici 4.- Demostrau que: (per $a \geq 0$)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right) \cdot \left(1 + \frac{2a}{n}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{na}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{(1+a)^{1+a}}{e^a}$$

Exercici 5.- Dins d'una bossa hi ha boles indistingibles al tacte, n d'elles de color negre i r de color blanc, si les extraiem totes una darrera l'altre de manera aleatòria. Contesta raonadament

- a) Quantes disposicions diferents es poden donar?
- b) En el cas de $n = 4$ negres i $r = 5$ blanques quina probabilitat hi ha que almenys dues boles negres surtin consecutivament?
- c) En el cas $n = 4$ negres i $r = 11$ blanques quina probabilitat hi ha que almenys dues boles negres surtin consecutivament?